INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE 1979

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coeff. : 4

1 Toutes les questions traitées doivent être référencées avec précision

2 Tout résultat ne sera pris en considération que s'il est justifié par un calcul suffisamment détaillé

3 La présentation et la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale.

EXERCICE I (3 points)

Discuter algébriquement ou graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions réelles de l'équation

$$x - 1 = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + m}$$

EXERCICE II (5 points)

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{2} < p < 1$ $\quad$ et $q = 1 - p$

On considère l'ensemble $A = \left\{ b_x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x} \;/\; 0 \leq x \leq n \right\}$

1°) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$ $\quad b_0 < b_x$

2°) Démontrer que A admet un élément maximum b_x pour la valeur de x telle que $\quad np - q < x < np + p$ si $np + p \notin \mathbb{N}$

3°) On considère une urne contenant n_1 boules blanches identiques et n_2 boules noires identiques telles que $6\, n_1 = 4\, n_2$

On tire de cette urne successivement douze boules en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. On suppose tous les tirages équiprobables

On désigne par E_x l'évènement "le nombre de boules noires tirées est égal à x " et $P_n(E_x)$ la probabilité de cet évènement.

a) Quel est l'élément maximum de l'ensemble : $\left\{ P_n(E_x) \;/\; 0 \leq x \leq 12 \right\}$

b) Si X désigne la variable aléatoire "nombre de boules noires tirées" Calculer $E(X)$ l'espérance de X puis $E(X^2)$ le moment d'ordre 2 de X

c) Soit R_k l'évènement "le rang de la première boule noire apparue est k " et $P_n(R_k)$ la probabilité de cet évènement

Calculer $P_n(R_k)$ pour $1 \leq k \leq 12$

puis $\sum_{k=1}^{12} P_n(R_k)$

PROBLEME (12 points)

1ère partie

1) Soit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Etablir dans le cas où $\ell = 0$ l'équivalence des propositions suivantes

a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ

b) La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ

Si $\ell \neq 0$ y-a-t-il équivalence entre ces deux propositions pour toute suite numérique ?

2) On considère $k \in \mathbb{R}$ et la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{k^n}{n!}$
Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{R}$ cette suite a pour limite 0

3) Appliquer la formule de Mac Laurin à la fonction f de la variable réelle x telle que $x \longrightarrow f(x) = e^x$ en utilisant le reste de Lagrange
Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x = 1 + \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$

.../...

2ème partie

$\mathcal{M}_2$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On supposera connues les structures classiques de $\mathcal{M}_2$

Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2$

On pose $D^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D^1 = D$

1) $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'expression de D^n

2) Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n} D^i$. Déterminer pour quelles valeurs de a et de b

S_n a une limite S appartenant $\mathcal{M}_2$ quand n tend vers $+\infty$

3) A quelle condition la matrice I-D est inversible ? et comparer

$(I-D)^{-1}$ et S quand ces deux matrices existent.

4) On pose $e^{D_n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{D^i}{i!}$ déterminer la limite de e^{D_n} quand

n tend vers $+\infty$. On désignera par e^D cette limite.

Donner l'expression de e^D lorsque $a = 14$ et $b = 1$

3ème partie

1°) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathcal{M}_2$ vérifiant la relation

$M^2 - 15M + 14I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer x

2°) On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_2$ qui sont combinaisons linéaires de M et de I

Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.

3°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de M

4°) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_2$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale

5°) Déterminer la matrice $e^M = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{M^i}{i!}$

4ème Partie

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a + b \neq 1$$

1 Montrer que G est un groupe multiplicatif

2 On considère l'ensemble F des matrices de G telles que

$$0 < a < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < b < 1$$

F est-il un sous-groupe de G ?

3 Soit N une matrice de F

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de N

b) Déterminer une matrice $T \in \mathcal{M}_2$ inversible telle que $T^{-1}NT$ soit diagonale

c) $n \in \mathbb{N}^*$ déduire l'expression de N^n

d) Déterminer la limite de N^n quand n tend vers $+\infty$
Cette limite appartient-elle à F ?

Nota : La 4ème Partie du problème est indépendante des autres

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail